Un homéomorphisme réalisé par l'exponentielle de matrice

Théorème : L'application $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Démonstration :

• L'application $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est bien définie, et continue.

En effet, si $S \in S_n(\mathbb{R})$, le théorème spectral fournit $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ tels que $S = P \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} {}^tP$. On a alors $\exp S = P \begin{pmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{pmatrix} {}^tP$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $e^{d_i} > 0$, donc $\exp S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. L'application considérée est donc bien définie, et continue par restriction d'une application continue.

• On va montrer la surjectivité. Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, on écrit $B = P \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} {}^tP$, avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors $B = \exp A$, avec $A = P \begin{pmatrix} \ln \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ln \mu_n \end{pmatrix} {}^tP \in S_n(\mathbb{R})$, ce qui donne la surjectivité.

• On va montrer l'injectivité. Soient $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp A = \exp A'$. On note $d_1, \dots, d_n$ les valeurs propres de A. Soit Q un polynôme interpolateur de Lagrange tel que $Q(e^{d_i}) = d_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Par théorème spectral, on fixe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} {}^tP$.

Alors A' commute avec $Q(\exp A') = Q(\exp A)$

$$
\begin{aligned}
&= Q(P \cdot \mathrm{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n})\, {}^tP) \\
&= P\, Q(\mathrm{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n}))\, {}^tP \\
&= P \cdot \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)\, {}^tP = A
\end{aligned}
$$

Par diagonalisation simultanée, on fixe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $A = R \cdot \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) \cdot R^{-1}$, $A' = R \cdot \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot R^{-1}$. On a $\exp A = R \cdot \mathrm{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n}) \cdot R^{-1}$, $\exp A' = R \cdot \mathrm{diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n}) \cdot R^{-1}$

donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e^{d_i} = e^{\mu_i}$, ce qui donne $d_i = \mu_i$, d'où $A = A'$.

Ceci donne l'injectivité.

- Soit à présent $(B_p)_{p \in \mathbb{N}} = (\exp A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} B = \exp A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On va montrer que $A_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} A$.

La suite $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ étant convergeante, elle est bornée pour $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_2$.

On dispose cependant du lemme :

Lemme : Pour tout $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\|M\|_2 = \rho(M)$.

→ Preuve du lemme : Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, on fixe une base orthonormale $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait $Me_i = d_i e_i$, $d_i > 0$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n$, avec $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

On a
$$\|Mx\|_2^2 = \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i Me_i\Big\|_2^2 = \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i d_i e_i\Big\|_2^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 d_i^2 \quad \text{par Pythagore}$$
$$\leqslant \rho(M)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \rho(M)^2$$

De plus, si $x = e_i$, où $i \in [\![1, n]\!]$ est tel que $d_i = \rho(M)$, on a $\|Mx\|_2^2 = \rho(M)^2$.

Ceci donne $\|M\|_2 = \rho(M)$, d'où le lemme.

On retourne à la preuve du théorème. La suite $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ étant bornée, les spectres des B_p sont majorés par une constante C. En appliquant le même raisonnement à B_p^{-1}, qui tend vers B^{-1}, on montre que les spectres des B_p sont minorés par une constante c'. Toutes les valeurs propres des B_p sont donc dans $K = [c' ; c] \subset]0, +\infty[$, donc toutes les valeurs propres des A_p sont dans le compact $[\ln c', \ln c]$.

La suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc bornée pour $\|\cdot\|_2$, et sa seule valeur d'adhérence est A.
En effet, si $\bar{A}$ est une valeur d'adhérence de $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$, et p_k une extraction telle que $A_{p_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \bar{A}$, on a $\exp \bar{A} = \lim\limits_{k \to +\infty} \exp(A_{p_k}) = B = \exp A$, ce qui donne $A = \bar{A}$ par injectivité. La suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ étant bornée et ayant pour unique valeur d'adhérence A, elle converge vers A, ce qui donne la bicontinuité de $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ceci achève la preuve.